# Предваренная нормальная форма

Говорят, что формула ИП1 задана в предваренной нормальной форме (ПНФ), если она имеет вид:

,

где , а формула , называемая матрицей, не содержит кванторов. Заметим, что помимо связанных вхождений переменных  матрица может содержать и некоторые свободные переменные. Цепочка кванторов перед матрицей называется кванторной приставкой.

Можно доказать, что любая формула может быть преобразована к эквивалентной ПНФ.

Основные правила преобразования:

1. Тождества булевой алгебры
2. 
3. 

при условии, что x не входит свободно в G.

1. То же для квантора существования.
2. 
3. 
4. 
5. 
6. , где y не входит в F (необходимо переименование связанной переменной во второй формуле слева!)
7. , где y не входит в F.

Правила (7) – (10) могут быть обобщены:

1. 
2. ,

где Q1 и Q2 независимо в (11) и (12) пробегают множество кванторов.

Необходимость переименования связанной переменной в (9) и (10) иллюстрируется такими простыми контрпримерами.

Пусть F(x) = “x – четно”, G(x) – “x – нечетно”. Тогда формула  истинна в целочисленной интерпретации, а формула ложна.

В этом же случае формула  истинна, а формула  ложна.

Но можно доказать

├.

Действительно:

1.  - гипотеза

2.  - теорема

3. - R1, (2) и (1)

4.  - схема (4)

5. - R1, (3) и (4)

6. - Gen,, (5)

Теорема дедукции применима, поскольку гипотеза не содержит свободных вхождений переменной x.

В то же время можно доказать, что формула



не является логически общезначимой.

Действительно, если (в целочисленной интерпретации) F(x) = “x четно”, а G(x)=”x нечетно”, то посылка истинна (ложь влечет ложь), а заключение ложно.

Все приведенные выше эквивалентности могут быть стандартно доказаны.

Докажем, например, (3):-

1. - гипотеза
2. - R7, (1)
3. - секвенция (3)
4. - R1, (2) и (3)
5. - схема (4)
6. - R1, (4) и (5)
7. - коммутативность дизъюнкции
8. - Gen, (7).

Обратно:

1.  - гипотеза
2. - коммутативность дизъюнкции
3. - схема (5); корректно, так как x не входит свободно в G.
4. - MP, (2) и (3)
5. - коммутативность дизъюнкции.

Доказательство эквивалентности

*(*Ǝ*x)P(x)˅Q(x) ≡ (*Ǝ*x)(P(x)˅Q(x))*

при условии, что x не входит свободно в Q.

С использованием правила выбора:

1.  – гипотеза

2. – правило C и свойства дизъюнкции:├  и

 ├ 

3.  – правило E4, (2)

Обратно:

1.  - гипотеза

2.  - правило C, (1)

3.  - правило E4 и свойства дизъюнкции: ├ и ├

Без использования правила выбора:

При выводе слева направо используем контрапозицию, то есть доказываем

├

1.  - гипотеза

2.  - A4, (1)

3. - закон де Моргана, (2)

4.  - свойства конъюнкции, (3)

5.  - Gen, (4)

6. - свойства конъюнкции, (4) и (5)

7. - закон де Моргана, (6)

В обратную сторону

1.  - гипотеза

2. - закон де Моргана, (1)

3.  - свойства конъюнкции, (2)

4. - свойства конъюнкции, (2)

5. - A4, (3)

6. - - свойства конъюнкции, (4) и (5)

7. - закон де Моргана, (6)

8.  - Gen, (7)

Заметим, что требование отсутствия свободных вхождений x в Q существенно, так как иначе была бы неприменима теорема дедукции.

Докажем (7) и (8).

**Доказательство** (7).

1.  - гипотеза
2. - свойства конъюнкции, (1)
3.  - правило (А4)
4.  - свойства конъюнкции
5. - Gen, (4)

Обратно:

1. - гипотеза
2.  - правило (А4)
3. - свойства конъюнкции
4.  - два раза Gen
5.  - свойства конъюнкции

**Доказательство** (8).

1. - гипотеза
2.  -закон де Моргана, (1)
3.  - согласно (7)
4.  - закон де Моргана
5.  - по определению квантора существования.

Доказательство обратной выводимости является точно инверсией только написанного доказательства .

Правило (9) может быть доказано так:

1. - переименовываем связанную переменную во втором члене дизъюнкции
2.  - согласно правилу (3) (x вообще не входит в G).
3. - согласно (3), так как y не входит в F.

Аналогично для правила (10) и всех обобщений.

**Замечание**. Связанную переменную всегда можно переименовать. Точнее, имеют место следующие эквивалентности:

 и  при условии, что *y* не входит в  .

(Или, допуская, что *y* не входит в F(x) *свободно*, необходимо потребовать, чтобы терм *y* был свободен для переменной *x* в формуле F(x).)

Это легко доказать.

**Примеры**. 1) 

.

2) 

3)



В итоге z остается свободной переменной во всей формуле.

Сколемовские формы:

1) 

2) 

3) 

Еще один пример приведения к сколемовской форме: для исходной ПНФ



получим



Переход к сколемовской форме, состоящий в устранении из приставки всех кванторов существования, производится следующим образом.

Если приставка начинается квантором существования , то всюду в матрице переменную следует заменить некоторой предметной константой . Эта константа абстрактна, как и при применении правила выбора.

Если в приставке квантор  стоит где-то посередине, то следует отметить ***все*** *стоящие перед ним кванторы общности*  и в приставке все вхождения переменной заменить термом , где - некоторая функция (точнее, функциональный символ), называемая функцией Сколема, или сколемовской функцией. Сколемовская стандартная форма не эквивалентна исходной ПНФ, но можно доказать, что если она невыполнима, то невыполнима и исходная ПНФ.